Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre printemps 2019-2020

Introduction aux ÉDP Master 1

Feuille d'exercices n° 2

Dans tout ce qui suit, N désigne un entier naturel non nul et Ω un borélien de $\mathbf{R}^N$. Sauf mention contraire on intégrera toujours par rapport à la mesure de Lebesgue.

Exercice 1. *Calculs élémentaires.*

1. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \delta_{(\varepsilon,0)}$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$ pour $\Omega = \mathbf{R}^2$ puis pour $\Omega = \mathbf{R}_+^* \times \mathbf{R}$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$ et $h \in \mathbf{R}^N$. Déterminer $\lim_{\varepsilon\to 0^+} \varepsilon^{-1}(\tau_{\varepsilon h}(T) - T)$ dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^N)$. Ici, pour $v \in \mathbf{R}^N$, $T \in D'(\mathbf{R}^N)$, $\tau_v(T)$ agit par $\phi \mapsto < T,\ \phi(\cdot + v) >$ pour $\phi \in D(\mathbf{R}^N)$.
3. Soit $(p,q) \in \mathbf{N} \times \mathbf{N}^*$. On note $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x^p$. Calculer $f\,\delta_0^{(q)}$.

Exercice 2. * *Distributions à support dans un singleton.*

Soit $T \in D'(\mathbf{R}^n)$ telle que $Supp(T)$ est un singleton. Montrer que T est une combinaison linéaire finie de la masse de Dirac et de ses dérivées, en supposant $Supp(T) = \{0\}$ et en notant p l'ordre de T, en passant par les étapes intermédiaires suivantes.

1. Localiser T en la multipliant par une fonction $\chi_\varepsilon = \chi(|\cdot|/\varepsilon)$ "remise à l'échelle"valant 1 dans un petit voisinage du support singleton. Que peut-on dire de $\chi_\epsilon T$?
2. Supposons que ϕ s'annule à l'ordre p en 0. Montrer que $< T, \phi >= 0$, en utilisant la question précédente et un développement de Taylor à l'ordre p.
3. Se ramener au cas général en soustrayant une fonction bien choisie pour se ramener au cas précédent, et conclure la preuve.

Exercice 3. *Valeur principale, partie finie.*

1. Expliquer pourquoi $1/X \notin L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ où $X : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $x \mapsto x$.
2. Montrer que la valeur principale de $1/X$ donnée par
$$\mathrm{Vp}\left(\frac{1}{X}\right) \ := \ \lim_{\varepsilon\to 0}\left(\frac{1}{X}\, 1_{|\cdot|\geq\varepsilon}\right),$$
définit bien une distribution.
3. Calculer la dérivée de la distribution définie par : $x \mapsto \log|x|$, $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$.
4. Montrer que
$$\frac{1}{X + i\varepsilon} \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} -i\pi\delta_0 + \mathrm{Vp}\left(\frac{1}{X}\right) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{X - i\varepsilon} \overset{\varepsilon\to 0^+}{\longrightarrow} i\pi\delta_0 + \mathrm{Vp}\left(\frac{1}{X}\right).$$

Exercice 4. *Une évidence...qu'il faut pourtant prouver*

Montrer que si u est une distribution sur $\mathbf{R}$ telle que $u' = 0$, alors on peut identifier u à une constante.

Indication : regarder l'action de u sur une fonction test ϕ **quelconque** d'intégrale 0, en considérant la primitive de ϕ.

Généraliser à $u^{(n)} = 0,\ n \in \mathbf{N}$.

Exercice 5. *Convergence des distributions.*

Déterminer la limite des distributions correspondant aux fonctions suivantes lorsque $n \to +\infty$:

1. $\sin(nx)$. *Indication :* Essayer de deviner la limite ; ensuite, intégrez par parties.
2. $n^4 \sin(nx)$. *Indication :* Calculez le moins possible !
3. $n \sin(nx) 1_{x \geq 0}$.

Exercice 6. *Quelques équations.*

Résoudre au sens des distributions les équations suivantes :

1. $xT = 0$.
   Indication : Identifier une solution particulière puis en procédant comme dans l'exercice avec $T' = 0$.
2. $xT = \delta_0$.
3. $xT' + T = 0$.

Exercice 7. *Transformée de Fourier.*

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbf{R}$ suivantes.

Indication pour cet exercice et les suivants : la correspondance entre multiplication par x et dérivation et la formule d'inversion de Fourier seront utiles dans le cas où le calcul direct est problématique.

1. δ_0
2. 1
3. $\exp(-|x|)$
4. $1/(1+x^2)$
5. $x^k,\ k \geq 0$.

Exercice 8. *Transformée de Fourier : suite.*

Calculer la transformée de Fourier des distributions tempérées sur $\mathbf{R}$ suivantes en se servant de celle de δ_0 et de l'imparité de $vp(1/x)$:

1. $vp(1/x)$. *Indication :* Utiliser (et montrer que) $x\ vp(1/x) = 1$ au sens des distributions tempérées. Pour cela, il faut montrer que $vp(1/x)$ est tempérée en passant par sa primitive (et utiliser la remarque que la transformée de Fourier d'une distribution tempérée impaire est impaire).
2. $1_{\mathbf{R}_+}$.